



Prof. Dr. Rupert Frank
Charlotte Dietze
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 1 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
28. Oktober 2021

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^N n \right)^2 = \sum_{n=1}^N n^3.$$

Lösung. Sei $N \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

woraus sich

$$\left(\sum_{n=1}^N n \right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

ergibt. Wir beweisen nun

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \quad (1)$$

per Induktion über $N \in \mathbb{N}$, was dann die gewünschte Aussage liefert.

Induktionsanfang: Für $N = 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^1 n^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

Induktionsschritt: Die Aussage (1) gelte für ein festes gegebenes $N \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme I.A.). Mit dieser Annahme zeigen wir nun, dass (1) auch für $N+1$ gilt. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+1} n^3 &= \sum_{n=1}^N n^3 + (N+1)^3 \stackrel{\text{I.A.}}{=} \frac{N^2(N+1)^2}{4} + (N+1)^3 \\ &= \frac{(N+1)^2(N^2 + 4(N+1))}{4} \\ &= \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{4} = \frac{(N+1)^2((N+1)+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

wobei wir die binomische Formel in der Form $N^2 + 4N + 4 = (N+2)^2$ verwendet haben. Wir folgern (1) für alle $N \in \mathbb{N}$ aus dem Prinzip der vollständigen Induktion. $\square$

Aufgabe 2 (4 + 6 Punkte). (i) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine der folgenden zwei Aussagen gilt:

- n ist gerade, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n = 2m$.
- n ist ungerade, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2m + 1$.

Folgern Sie daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n(n+1)$ gerade ist.

(ii) Zeigen Sie für alle $N \in \mathbb{N}$, dass $N^3 + 5N$ durch 6 teilbar ist (das heißt, für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass $N^3 + 5N = 6M$).

Aufgabe 3 (7 + 3 Punkte). (i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq x \leq 1$ gilt, dass

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x. \quad (2)$$

(ii) Gilt (2) auch für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 1$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte). (i) Seien $x_1, \dots, x_n$ positive reelle Zahlen, d.h. $x_k > 0$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Es gelte zudem $\prod_{k=1}^n x_k = 1$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq n,$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $x_k = 1$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Seien $y_1, \dots, y_n$ positive reelle Zahlen, d.h. $y_k > 0$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \geq \prod_{k=1}^n y_k^{1/n},$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $y_k = y_m$ für alle $k, m \in \{1, \dots, n\}$.

Hinweis: Für diese Aufgabe dürfen Sie die Existenz der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ einer positiven, reellen Zahl x als gegeben voraussetzen. Diese hat die Eigenschaft, dass $x^{1/n} > 0$ und $(x^{1/n})^n = x$.

Lösung. (i) Wir beweisen die Aussage per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$ und $x_1 > 0$ mit $\prod_{k=1}^1 x_k = x_1 = 1$. Daraus folgt unmittelbar

$$\sum_{k=1}^1 x_k = x_1 = 1.$$

Induktionsschritt: Die Aussage aus der Angabe gelte für ein festes gegebenes $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Seien $x_1, \dots, x_{n+1} > 0$ mit

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1. \quad (3)$$

Wir bemerken zunächst, dass es mindestens ein $k \in \{1, \dots, n+1\}$ geben muss mit $x_k \geq 1$. Andernfalls wäre $\prod_{k=1}^{n+1} x_k < 1$ (warum folgt das aus den Rechenregeln für angeordnete Körper?), im Widerspruch zu (3).

Mit einer analogen Begründung muss es mindestens ein $j \in \{1, \dots, n+1\}$ geben mit $x_j \leq 1$. Durch Umnummerieren der Terme können wir immer erreichen, dass $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ gilt. Damit folgt

$$x_{n+1} - 1 \geq x_n(x_{n+1} - 1)$$

oder äquivalent

$$x_n + x_{n+1} \geq 1 + x_n x_{n+1}. \quad (4)$$

Betrachte nun die n Zahlen $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$. Wegen (3) ergibt deren Produkt 1. Also können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n x_{n+1} \geq n \quad (5)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n x_{n+1} = 1. \quad (6)$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n + x_{n+1} \stackrel{(4)}{\geq} \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n x_{n+1} + 1 \stackrel{(5)}{\geq} n + 1. \quad (7)$$

Gleichheit in (7) gilt genau im Fall $x_n + x_{n+1} = 1 + x_n x_{n+1}$ oder $x_{n+1} - 1 = x_n(x_{n+1} - 1)$, was $x_n = 1$ oder $x_{n+1} = 1$ impliziert. Im Fall $x_{n+1} = 1$ folgt

$$1 \stackrel{(3)}{=} \prod_{k=1}^{n+1} x_k = \prod_{k=1}^n x_k$$

und wegen Gleichheit in (7) auch

$$\sum_{k=1}^n x_k = n.$$

Erneutes Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, \dots, x_n$ liefert $x_1 = \dots = x_n = x_{n+1} = 1$. Der Fall $x_n = 1$ läuft analog.

(ii) Das Ziel ist, Teil (i) der Aufgabe anzuwenden. Wir benötigen dazu n positive reelle Zahlen x_k , deren Produkt 1 ergibt. Da $y_k > 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, ist auch $\prod_{k=1}^n y_k > 0$ und $(\prod_{k=1}^n y_k)^{1/n} > 0$. Für $k \in \{1, \dots, n\}$ setze

$$x_k := \frac{y_k}{(\prod_{k=1}^n y_k)^{1/n}}.$$

Dann ist

$$\prod_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^n \left(\frac{y_k}{(\prod_{k=1}^n y_k)^{1/n}} \right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n y_k} \prod_{k=1}^n y_k = 1.$$

Mit Aufgabenteil (i) folgt somit

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq n.$$

Dividieren wir beide Seiten durch n und multiplizieren mit $(\prod_{k=1}^n y_k)^{1/n}$, erhalten wir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \geq \prod_{k=1}^n y_k^{1/n},$$

wie gewünscht. □

2i) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine der folgenden zwei Aussagen gilt:

- n ist gerade, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n = 2m$
- n ist ungerade, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2m + 1$.

Beweis:

Induktionsanfang ($n=1$): Es gilt $1 = 0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1$ und da $0 \in \mathbb{N}_0$ gilt: 1 ist ungerade.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, dass n gerade oder ungerade ist.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$): Wir wollen zeigen, dass $n+1$ gerade oder ungerade ist.

Fall 1: n gerade

Nach Annahme gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $n = 2m$. Also gilt $n+1 = 2m + 1$. Da $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $n+1$ ungerade ist.

Fall 2: n ungerade

Nach Annahme gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n = 2m + 1$. Also gilt $n+1 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2 = 2(m+1)$. Da $m \in \mathbb{N}_0$, gilt $m+1 \in \mathbb{N}$ und folglich ist $n+1$ gerade.

Fall 1 und Fall 2 zusammen zeigen, dass $n+1$ gerade oder ungerade ist.

□

Folgen Sie daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n(n+1)$ gerade ist.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen bereits, dass n gerade oder ungerade ist.

Fall 1: n gerade

In diesem Fall gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $n = 2m$. Also gilt

$$n(n+1) = 2m(2m+1) = 2 \cdot [m(2m+1)]$$

Da $m \in \mathbb{N}$ gilt auch $m(2m+1) \in \mathbb{N}$ und daher ist $n(n+1)$ gerade.

Fall 2: n ungerade

In diesem Fall gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n = 2m+1$. Also:

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2m+1)(2m+1+1) = (2m+1)(2m+2) = (2m+1) \cdot 2 \cdot (m+1) \\ &= 2 [(2m+1)(m+1)] . \end{aligned}$$

Da $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $(2m+1)(m+1) \in \mathbb{N}$ und damit ist $n(n+1)$ gerade.

Wir haben in beiden Fällen gezeigt, dass $n(n+1)$ gerade ist.

□

(ii) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n^3 + 5n = 6m$.

Beweis (per Induktion):

Induktionsanfang ($n=1$): Es gilt $1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6 = 6 \cdot 1$ und da $1 \in \mathbb{N}_0$ folgt, dass $1^3 + 5 \cdot 1$ durch 6 teilbar ist.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, dass $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$): Wir wollen zeigen, dass $(n+1)^3 + 5(n+1)$ durch 6 teilbar ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$(*) \quad n^3 + 5n = 6m.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 \\ &\stackrel{(*)}{=} 6m + 3n(n+1) + 6 \\ &= 6(m+1) + 3 \cdot n(n+1) \end{aligned}$$

Aus (i) wissen wir, dass $n(n+1)$ gerade ist. Also gibt es ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ so, dass $n(n+1) = 2\tilde{m}$. Es folgt

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 5(n+1) &= 6(m+1) + 3n(n+1) \\ &= 6(m+1) + 3 \cdot 2\tilde{m} = 6(m+1) + 6\tilde{m} \\ &= 6(m+1+\tilde{m}) \end{aligned}$$

Da $m \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ folgt, dass $m+1+\tilde{m} \in \mathbb{N}_0$ und folglich ist

$(n+1)^3 + 5(n+1)$ durch 6 teilbar.

□

3 i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq x \leq 1$ gilt, dass

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x \quad (*)$$

Beweis (per Induktion):

Induktionsanfang ($n=1$): Sei $0 \leq x \leq 1$. Dann gilt

$$(1+x)^1 = 1+x = 1 + (2^1 - 1)x.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte (*) für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq x \leq 1$.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$): Wir wollen zeigen, dass

$$(1+x)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)x$$

für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt. Sei $0 \leq x \leq 1$. Dann gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \stackrel{\substack{\text{(IV)} \\ \text{und } 1+x \geq 0}}{\leq} (1+x) [1 + (2^n - 1)x]$$

$$= 1 + (2^n - 1)x + x + (2^n - 1)x^2$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x - (2^{n+1} - 1)x + (2^n - 1)x + x + (2^n - 1)x^2$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x - 2^{n+1}x + 2^n x + x + (2^n - 1)x^2$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x - 2^n x + x + (2^n - 1)x^2$$

$$\begin{aligned} &= 2^{n+1} - 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x + x \left[- (2^n - 1) + (2^n - 1)x \right]$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x + x \cdot (2^n - 1)(x - 1)$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x - \underbrace{\underbrace{(2^n - 1)}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1 - x)}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$\leq 1 + (2^{n+1} - 1)x.$$

(iii) Gilt (*) auch für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > 1$? Beweisen Sie ihre Antwort!

Beh.: Nein

Beweis (durch Gegenbeispiel):

Wähle $n := 2$ und $x := 2$. Dann gilt

$$(1+x)^n = (1+2)^2 = 3^2 = 9$$

aber

$$1 + (2^n - 1)x = 1 + (2^2 - 1) \cdot 2 = 1 + (4 - 1) \cdot 2 = 1 + 3 \cdot 2 = 1 + 6 = 7.$$

Da $7 < 9$ folgt

$$(1+x)^n > 1 + (2^n - 1)x.$$

□